ασυμπτωτική διεύθυνση $\forall t \in I$. ($\Leftrightarrow \mathbb{II}_{c(t)}(c'(t))=0 \ \forall t \in I$)

Όπως ην διάγνωση

$w = a X_u + b X_v$ στο $X^{-1}(p)$

$\mathbb{II}_p(w) = ea^2 + 2fab + gb^2$, $(a,b) \neq (0,0)$

Συμπέρασμα: Το $w = aX_u + bX_v$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση ανν $\mathbb{II}_p(w)=0 \Leftrightarrow ea^2+2fab+gb^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2f\left(\frac{a}{b}\right) + g = 0$ ή $e + 2f\left(\frac{b}{a}\right) + g\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0$

Εάν είναι δευτέρου βαθμού

• $\Delta = 4f^2 - 4eg = 4(f^2 - eg) \geq 0 \Leftrightarrow K(p) \leq 0$

1) Αν $\Delta = 0$ έχουμε άπειρες ασυμπτωτικές διευθ.

2) Αν $\Delta < 0$ έχουμε 2 ασυμπτωτικές διευθ.

Παράδειγμα:

1) Έστω $S = \Gamma_h$, $h(x,y) = x^2 - y^2$

$$e = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$f = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} = 0, \quad g = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

α. Ποιές οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις στο P_0,

$P_0 = (x_0, y_0, x_0^2 - y_0^2) \in T_pS$;

$w = a X_x(x_0,y_0) + b X_y(x_0,y_0)$ ασυμπτ. διευθ. $\Leftrightarrow$

$ea^2 + \cancel{2fab}^{\,0} + gb^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$

• $a = b$, $w = a(X_x(x_0,y_0) + X_y(x_0,y_0))$

• $a = -b$, $w = a(X_x(x_0,y_0) - X_y(x_0,y_0))$

β. Ποιές οι ασυμπτωτικές καμπύλες;

Η $c(t) = (x(t), y(t))$ ασυμπτωτική $\Leftrightarrow e(x')^2 + \cancel{fx'y'}^{\,0} + g(y')^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x')^2 - (y')^2 = 0 \Leftrightarrow (x'+y')(x'-y') = 0 \Leftrightarrow (x+y)' = 0$ ή $(x-y)' = 0$

$\Leftrightarrow x(t)+y(t)=c_1$ ή $x(t)-y(t)=c_2$

Απάντηση:

Οι ασυμπτωτικές καμπύλες είναι οι εξής 2 οικογένειες καμπυλών

① $c(t)=x(t, c_1-t)$ } είναι εγκάρσιες καμπύλες
② $c(t)=x(t, -c_2+t)$ } της επιφάνειας όπου τέμνονται

① Ασυμπτωτικές καμπύλες της 1ης οικογένειας

$c(t)=(t,\ c_1-t,\ t^2-(c_1-t)^2)=(t,\ c_1-t,\ c_1(2t-c_1))$

οικογένεια ευθειών στην επιφαν. διότι εξαρτάται γραμμικά από την παράμετρο t.

② $c(t)=(t,\ -c_2+t,\ t^2-(2+t)^2)=\dots$ ξανά οικογένεια ευθειών στην επιφάνεια μας

$z=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ | $x+y=u$, $x-y=v$

$$\begin{cases} z=\dfrac{x-y}{c}, & x+y=c\neq 0 \\ z=\dfrac{x+y}{c}, & x-y=c \end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω S κανονική επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι υπερβολικά. Έστω $x: U\to S$ σύστ. συντ/νων. Οι παραμετρικές του καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες αν.ν $e=g=0$ στο U.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $e=g=0$ στο U

Η καμπύλη $c(t)=x(u(t),v(t))$ ασυμπτωτική καμπύλη ανν

$\cancelto{0}{e(u(t),v(t))(u'(t))^2}+2f(u(t),v(t))u'(t)v'(t)+\cancelto{0}{g(u(t),v(t))(v'(t))^2}=0$

$\Rightarrow 2f(u(t),v(t))u'(t)v'(t)=0$ ①

Τα σημεία υπερβολικά

$K=\dfrac{eg-f^2}{EG-f^2}\Leftrightarrow \cancel{eg}-f^2>0 \Leftrightarrow f^2>0 \Leftrightarrow f\neq 0$

$\Leftrightarrow u(t) =$ σταθ ή $v(t) =$ σταθ. άρα πράγματι είναι οι παραμετρικές καμπύλες

Αντίστροφα,

Εστω οι καμπύλες $\underset{u(t)}{X(t}, \underset{v(t)}{v=}$σταθ$)$, $X(\underset{u(t)}{u=}$σταθ$, \underset{v(t)}{t})$ είναι ασυμπτωτικές καμπύλες. Άρα θα πρέπει να είναι λύσεις της εξίσωσης

$e(u(t),v(t))^2 u'(t)^2 + \dots = 0$

αντικαθιστώντας σε αυτή

$e(t, v=$σταθ$)=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$

Αν όλα τα σημεία της S είναι υπερβολικά τότε υπάρχει συστ. συντ/νων $X: U \to S$ με $p \in X(U)$ του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες ($\xLeftrightarrow{\text{προτ.}} e=g=0$)

ΚΥΡΙΕΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ - ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια

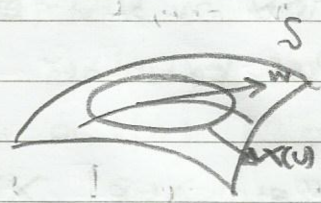
(I) Έστω $p \in S$. Το $w \in T_pS \setminus \{0\}$ καλείται κύρια διεύθυνση της S στο $p \Leftrightarrow$ είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten L_p.

(II) Μια επιφανειακή καμπύλη $C: I \to S$ καλείται καμπύλη καμπυλότητας $\Leftrightarrow \forall t \in I$, η $c'(t)$ είναι κύρια διεύθυνση της S στο $c(t)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω S κανονική επιφάνεια $X: U \to S$ συστ. συντ/νων και $p \in X(U)$. Το διάνυσμα $w = aX_u + bX_v$, $(a,b) \neq (0,0)$ είναι κύρια διεύθυνση αν.ν.

ανν $\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $w = a x_u + b x_v$ είναι ιδιοδιάνυσμα της $L_p \Longrightarrow$

$L_p w = \lambda w \Leftrightarrow L_p(a x_u + b x_v) = \lambda(a x_u + b x_v) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a L_p x_u + b \cdot L_p x_v = \lambda a x_u + \lambda b x_v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} L_p x_u = a_{11} x_u + a_{21} x_v \\ L_p x_v = a_{12} x_u + a_{22} x_v \end{cases}$

$A = (a_{ij}) = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

Άρα,

$a(a_{11} x_u + a_{21} x_v) + b(a_{12} x_u + a_{22} x_v) = \lambda a x_u + \lambda b x_v \Leftrightarrow$

$(a a_{11} + b a_{12}) x_u + (a a_{21} + b a_{22}) x_v = \lambda a x_u + \lambda b x_v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a a_{11} + b a_{12} = \lambda a \\ a \cdot a_{21} + b a_{22} = \lambda b \end{cases} \xrightarrow{\text{Απαλ. του } \lambda} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η παραμετρική καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι καμπύλη καμπυλότητας $\Leftrightarrow c'(t) = u'(t) X_u(u(t), v(t)) + v'(t) X_v(u(t), v(t))$

και $\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$ όπου $E = E(u(t), v(t)) \dots$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω επιφάνεια με $k_1 > k_2$ παντού και $X: U \to S$ τυχόν σύστ. συντεταγμένων. Τότε, οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες καμπυλότητας ανν $F = f = 0$ στο U (άρα οι πίνακες των II_p και I_p είναι διαγώνιοι)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εστω $F=f=0$ στο U

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff u'v' \begin{vmatrix} E & G \\ e & g \end{vmatrix} = 0 \iff (Eg-eG)u'v'=0$$

Αν ήταν $Eg-eG=0 \iff \dfrac{e}{E}=\dfrac{g}{G}$ αδύνατο

Άρα, $u'=0$ ή $v'=0$

Αντίστροφα,
Εστω οι παραμετρικές καμπύλες
$X(t, v=v_0)$, $X(u=u_0, t)$ τότε θα πρέπει

Για την $1^{η}$

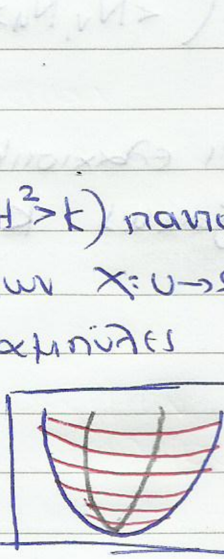
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ef-eF=0$$

Για την $2^{η}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Fg-fG=0$$

Αλλα $X_u \perp X_v \Rightarrow F=0$ $\Big\}$ $f=0$

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Έστω S κανονική επιφάνεια με $k_1>k_2 \ (\iff H^2>K)$ παντού.
Τότε για κάθε $p\in S$ υπάρχει συστ. συντ/νων $X: U\to S$
με $p\in X(U)$ ε/ω οι παραμετρικές του καμπύλες
είναι γραμμές καμπυλότητας $\iff F=f=0$



$z=x^2+y^2$

1η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ: $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w\rangle$

2η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ: $II_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_p w, w\rangle$

3η ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΜΟΡΦΗ: $III_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $III_p(w) = \langle L_p w, L_p w\rangle = \|L_p w\|^2$

οπου είναι ημιοριστική διοτι $\|L_p w\|^2 \geq 0$

Διαφορετικά γραφεται

$III_p(w) = \langle L_p^2 w, w\rangle$, $L_p^2 = L_p \circ L_p$

$L_p = -dN_p$

$III_p(w) = \langle dN_p(w), dN_p(w)\rangle$, $N : S \to S^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\forall p \in S$ ισχυει:

$III_p - 2H(p) II_p + K(p) I_p = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Βάσει του Θεωρήματος Cayley-Hamilton

$L_p^2 - tr(L_p) L_p + \det L_p \, Id = 0 \Rightarrow L_p^2 - 2H(p) L_p + K(p) Id = 0$

$\Rightarrow L_p^2 w - 2H(p) L_p w + K(p) w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle L_p^2, w\rangle - 2H_p \langle L_p w, w\rangle + K(p) \langle w, w\rangle = 0$

Ο πίνακας της III ως προς τη βάση X_u, X_v

$$\begin{pmatrix} \|N_u\|^2 & \langle N_u, N_v\rangle \\ \langle N_v, N_u\rangle & \|N_v\|^2 \end{pmatrix}$$

Οι ελαχιστικές επιφάνειες εχουν καμπυλότητα

Gauss $K \leq 0 \Rightarrow$ δεν εχουν υπερβολικά σημεία